OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A XII-A

Programa M1

1.	**Din oficiu**	**1p**
a)	Verificarea axiomelor.	**4p**
b)	$\alpha*\alpha=\dfrac{2\alpha(1+a)^2}{\alpha^2+(1+a)^2}=\dfrac{4(1+a)^3}{5(1+a)^2}=\dfrac{4}{5}(1+a)=\dfrac{8}{10}(1+a)$	**1p**
	$\alpha*\alpha*\alpha=\dfrac{\left[\frac{4}{5}(1+a)+\frac{1}{2}(1+a)\right](1+a)^2}{\frac{4}{5}(1+a)\cdot\frac{1}{2}(1+a)+(1+a)^2}=\dfrac{\frac{13}{10}(1+a)^3}{\frac{7}{5}(1+a)^2}=\dfrac{13}{14}(1+a)=\dfrac{26}{28}(1+a).$	**1p**
	Demonstrare prin metoda inducţiei $\alpha*\alpha*......*\alpha=\dfrac{3^n-1}{3^n+1}\cdot(1+a).$	**3p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
	Dacă $f:Z\to Z$ este un automorfism al grupului $(Z,\circ)$, avem $f(x+y-1)=f(x)+f(y)-1,\ \forall x,y\in Z.$	**1p**
	Pentru $x=y=1$ obţinem $f(1)=1.$	**1p**
	Notând $f(2)=a\in Z,$ obţinem $f(x)=(x-1)a-x+2\ ,\forall x\in Z.$	**5p**
	Din surjectivitatea lui f rezultă că $\exists b\in Z$ astfel ca $f(b)=2$, de unde avem $a=0$ sau $a=2$ şi deci $f(x)=x$ sau $f(x)=2-x.$	**2p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
a)	$F_a*F_b=F_{ab-a-b+2}=F_{(a-1)(b-1)+1}\in G$	**1p**
	demonstrarea asociativităţii şi a comutativităţii	**1p**
	elementul neutru este $F_2\in G$	**1p**
	pentru orice $F_a\in G$ există element simetric $F_{\frac{a}{a-1}}\in G$, deci $(G,*)$ este grup abelian.	**1p**
b)	$F(x)=\int xe^x dx=xe^x-e^x+C$, $F_0(0)=-1\Rightarrow C=0\Rightarrow F_0(x)=xe^x-e^x$	**1p**
	$F_2(x)=xe^x-e^x+2$, $(F_2\circ F_2)(1)=e^2+2$	**1p**
	$(F_c*F_c)(1)=F_{(c-1)^2+1}(1)=(c-1)^2+1$	**1p**
	deci ecuaţia $(c-1)^2+1=e^2+2$, a cărei soluţii sunt $c=1\pm\sqrt{e^2+1}$	**2p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	Înmulțind cu e^{-x} relația din enunț obținem $e^{-x}\cdot F(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ de unde avem $\left(e^{-x}\cdot F(x)\right)'=-e^{-x}\cdot\sin^2 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	Prin integrare: $e^{-x}\cdot F(x)=\int -e^{-x}\cdot\sin^2 x\,dx=e^{-x}\cdot\sin^2 x+\frac{1}{5}e^{-x}\cdot(\sin 2x+2\cos 2x)+C$	**3p**
	De unde $F(x)=\sin^2 x+\frac{1}{5}(\sin 2x+2\cos 2x)+Ce^x$	**1p**
	Din $x=0$ și $f(0)=1$ avem $F(0)=1$ de unde obținem $C=\frac{3}{5}$	**1p**
	Deci $F(x)=\sin^2 x+\frac{1}{5}(\sin 2x+2\cos 2x)+\frac{3}{5}e^x$	**1p**
	Cum pentru $\forall x\in\mathbb{R}$ $F(x)-f(x)=\sin^2 x$ se obține funcția căutată $f(x)=\frac{1}{5}(\sin 2x+2\cos 2x)+\frac{3}{5}e^x$	**1p**